**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**

**MATEMATIČKI ODSJEK**

Darija Štimac

# FIBONACCIJEVI BROJEVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, srpanj, 2016

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

# Sadržaj

**Sadržaj** iv

**Uvod** 3

**1 Osnovno o Fibonaccijevom nizu** 4
- 1.1 Definicija . . . . . 4
- 1.2 Binetova formula . . . . . 6
- 1.3 Identiteti . . . . . 8
- 1.4 Djeljivost . . . . . 13

**2 Fibonaccijevi brojevi oko nas** 17
- 2.1 Zlatni rez . . . . . 17
- 2.2 Veza Fibonaccijevih brojeva i zlatnog reza . . . . . 21
- 2.3 U likovnoj umjetnosti . . . . . 22
- 2.4 U arhitekturi . . . . . 25
- 2.5 U svijetu biljaka . . . . . 28
- 2.6 Na ljudskom tijelu . . . . . 32

**Bibliografija** 33

# Uvod

Zasigurno jedan od najvećih matematičara srednjeg vijeka bio je Talijan Leonardo Pisano, poznatiji kao Fibonacci. Rođen je oko 1775. Godine. Započeo je s učenjem matematike u Bugiji, gradu na Obali Barbary u Africi kojeg su osnovali trgovci iz Pise. Iz poslovnih razloga putovao je Bliskim Istokom i usput je upoznavao matematičare s kojima je ulazio u ozbiljne rasprave što je doprinjelo njegovom otvorenom načinu razmišljanja. Također, bio je upoznat i s Euklidovim metodama te je rabio njegove vještine i tako Europljane upoznavao kako koristiti matematiku u praktične svrhe.

Fibonaccijevi doprinosi uključuju, između ostalog, uvođenje praktičnog sustava numeriranja, korištenje algoritama i algebarskih metoda. Kao rezultat toga, škole u Toskani uskoro su počele poučavati Fibonaccijev oblik računanja što je dovelo do napuštanja uporabe abacusa, koja je uključivala brojanje kuglica nanizanih na žici i zatim bilježenje rezultata rimskim brojevima. To je zasigurno uvelike unaprijedilo disciplinu matematike, budući da upotreba algoritama nije bila moguća s nezgrapnim simbolima. Svojom revolucionarnom knjigom *Liber Abaci* (Knjiga o računanju), objavljenoj 1202., koja sadrži mnoge zanimljive upute i primjere računanja, a u kojoj se po prvi put u europskom dijelu svijeta objašnjava račun s arapskim zapisivanjem brojeva, ali i drugim kasnijim publikacijama, doprinio je razvoju europske matematike. To je kao posljedicu imalo drugačije razumijevanje matematike ali i promjenu u njenoj zapadnoeuropskoj upotrebi, prvenstveno na korištenje arapskog (decimalnog) brojevnog sustava u Europi i njegovo predvladavanje nad rimskim sustavom.

### Ideja i otkriće Fibonaccijevih brojeva

Učenjaci su utvrdili da su arapski brojevi po prvi put upotrijebljeni u zapadnom svijetu 1202. To je upravo godina u kojoj je Leonardno Pisano objavio svoje monumentalno i sveobuhvatno djelo *Liber Abacci* koja predstavlja veliki doprinos razvoju matematike i neizostavan je dio matematičke povijesti. Fibonacci je ovako započeo prvo poglavlje svoje knjige:

*Devet indijskih*[1] *brojeva su*:

9 8 7 6 5 4 3 2 1.

*S ovih* 9 *brojeva, i sa znakom* 0*, koji Arapi nazivaju* zefir*, bilo koji broj može biti zapisan.*

Ovo označava prvu formalnu upotrebu brojevnog sustava s bazom 10 u zapadnom svijetu. Za razliku od utjecajnih ličnosti iz prošlosti, čija se današnja slava većim dijelom zasniva na jednom jedinom djelu, kao što se slava Georgea Bizeta (1838.-1875.) zasniva na *Carmen*, Engelberta Humperdincka (1854.-1921.) na *Ivici i Marici*, ili J. D. Salingera (rođen 1919.) na *Lovcu u žitu*, razmišljati o Fibonacciju kao matematičaru koji je poznat jedino po sada poznatom nizu brojeva koji nosi njegovo ime bilo bi sasvim pogrešno. On je bio jedan od najutjecajnijih matematičara zapadnjačke kulture i neupitno vodeći matematički um svoga vremena. Ne samo da je ukazao oruđe za učinkovito bavljenje matematikom, nego je i u Europu uveo misaoni proces koji je otvorio put suvremenoj matematici.

Među matematičkim problemima koje Fibonacci postavlja u 12. poglavlju *Liber Abaccija* jedan je koji se odnosi na razmnožavanje zečeva prepričan ovako:

*Seljak uzgaja zečeve. Svaki par zečeva, starih barem dva mjeseca, dobiju svakog mjeseca par mladih: zeca i zečicu. Zečevi nikad ne umiru. Ako na početku krećemo s jednim novorođenim parom, koliko će biti ukupno parova zečeva nakon n mjeseci?*

Lako se može zaključiti što će se događati sa zečevima tijekom nekoliko prvih mjeseci. Na kraju prvog mjeseca broj parova je 1. Na kraju drugog je također 1 par jer zečica može rađati tek nakon navršena dva mjeseca. Na kraju trećeg su 2 para, od toga jedan stari koji će nastaviti reprodukciju i jedan mladi koji treba pričekati još jedan mjesec. Na kraju četvrtog mjeseca seljak ima 2+1, tj. 3 para, od kojih je jedan novorođen. Na kraju petog mjeseca ima ih 3+2, tj. 5. U svakom idućem mjesecu njihov zbroj je jednak broju parova iz prethodnog mjeseca uvećan za broj novorođenih, a ovaj je jednak broju parova koji su postojali dva mjeseca prije. Na taj način dolazimo do niza

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

koji je danas poznat kao *Fibonaccijev niz brojeva*. Naizgled samo još jedan niz koji je dobio naziv po matematičaru koji ih je otkrio, no ipak ne postoje brojevi u čitavoj matematici koji su toliko sveprisutni kao Fibonaccijevi brojevi. Pojavljuju se u geometriji, algebri, teoriji brojeva i mnogim drugim granama matematike, a što je još zanimljivije, njihovo pojavljivanje je sveprisutno i u prirodi; npr. broj spirala listića na šišarkama uvijek je Fibonaccijev broj, kao i broj spirala listića na ananasu. Fibonaccijevi brojevi mogu se

[1]Fibonacci je rabio naziv indijski brojevi za Hindu brojeve.

naći u vezi s rasporedom grana na različitim vrstama drveća, kao i u broju predaka kod svake generacije muške pčele na njenom obiteljskom stablu, i u mnogim drugim prirodnim oblicima i pojavama, što matematiku kao znanost čini još ljepšom.

# Poglavlje 1

# Osnovno o Fibonaccijevom nizu

## 1.1 Definicija

**Definicija 1.1.1.** *Niz* $(F_n)$ *zadan početnim vrijednostima* $F_1 = 1$*,* $F_2 = 1$*, te rekurzivnom relacijom*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1.1}$$

*za sve* $n \geq 2$ *naziva se* ***Fibonaccijev niz****. Opći član niza* $F_n$ *još zovemo n-ti* ***Fibonaccijev broj****.*

Ponekad inicijaliziramo Fibonaccijev niz s $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Zanimljivo je da je ovom nizu ime nadjenuo francuski matematičar François Édouard Anatole Lucas (1842.-1891.) koji je i sam izučavao rekurzivno zadane nizove.

Svaki rekurzivan niz, pa tako i Fibonaccijevi, ovisi o zadanim početnim uvjetima. Stoga je smisleno definirati niz koji ovisi o proizvoljnim početnim uvjetima, a ostali članovi generiraju se istom rekurzijom (1.1).

**Definicija 1.1.2.** *Neka su* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Niz* $(G_n)$ *zadan početnim vrijednostima* $G_0 = a$*,* $G_1 = b$*, te rekurzivnom relacijom*

$$G_{n+1} = G_n + G_{n-1}$$

*za* $n \geq 1$ *naziva se* ***generalizirani Fibonaccijev niz****.*

Raspisivanjem prvih nekoliko članova generaliziranog Fibonaccijevog niza:

$$\begin{aligned} G_2 &= a + b, \\ G_3 &= a + 2b, \\ G_4 &= 2a + 3b, \\ G_5 &= 3a + 5b, \\ G_6 &= 5a + 8b, \\ &\vdots \end{aligned}$$

uočavamo da se kao koeficijenti pojavljuju članovi *običnog* Fibonaccijeva niza. Vrijedi sljedeća tvrdnja.

**Propozicija 1.1.3.** *Ako je $(G_n)$ generalizirani Fibonaccijev niz određen s početnim vrijednostima $G_0 = a$ i $G_1 = b$, onda*

$$G_n = aF_{n-1} + bF_n,$$

*za sve $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 2$.*

*Dokaz.* Tvrdnju ćemo pokazati pomoću principa matematičke indukcije. Baza vrijedi jer za $n = 2$ imamo

$$G_2 = aF_1 + bF_2 = a + b.$$

Pretpostavimo da tvrdnja

$$G_k = aF_{k-1} + bF_k$$

vrijedi za sve $k \in \mathbb{N}$ i $2 \leq k \leq n$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $k = n + 1$:

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= G_n + G_{n-1} = \{\text{P.I.}\} = aF_{n-1} + bF_n + aF_{n-2} + bF_{n-1} \\ &= a(F_{n-1} + F_{n-2}) + b(F_n + F_{n-1}) = aF_n + bF_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Istaknut ćemo još jedan specijalan generalizirani Fibonaccijev niz.

**Definicija 1.1.4.** *Generalizirani Fibonaccijev niz određen početnim vrijednostima $a = 2$ i $b = 1$ naziva se* ***Lucasov niz*** *i označava s $(L_n)$.*

Dakle, Lucasov niz zadan je također rekurzivnom relacijom $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ za $n \geq 1$ pri čemu su početne vrijednosti $L_0 = 2$ i $L_1 = 1$. Prvih nekoliko članova Lukasovog niza je

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$$

Za očekivati je da postoje mnoge veze izmedju Fibonacijevih i Lucasovih brojeva. Neke od njih dane su u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 1.1.5.** *Vrijedi*

**(a)** $L_n = F_n + 2F_{n-1}$, $n \geq 1$,

**(b)** $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, $n \geq 1$,

**(c)** $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$, $n \geq 2$,

**(d)** $F_n = \dfrac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}, n \geq 1$,

**(e)** $F_n = \dfrac{L_{n-3} + L_{n+3}}{10}$, $n \geq 3$.

*Dokaz.* **(a)** Direktno iz Propozicije 1.1.3.

**(b)** Prema (a) imamo

$$L_n = F_n + 2F_{n-1} = (F_n + F_{n-1}) + F_{n-1} = F_{n+1} + F_{n-1}.$$

**(c)** Iz (b) slijedi

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_{n+2} - F_n + F_n - F_{n-2} = F_{n+2} - F_{n-2}.$$

**(d)** Zbrajanjem

$$\begin{aligned} L_{n-1} &= F_{n-2} + F_n, \\ L_{n+1} &= F_n + F_{n+2}, \end{aligned}$$

dobivamo

$$L_{n-1}+L_{n+1} = 2F_n+F_{n-2}+F_{n+2} = 2F_n+F_{n-2}+F_n+F_{n+1} = 3F_n+F_{n-2}+F_n+F_{n-1} = 5F_n.$$

**(e)** Slično kao (d).

□

## 1.2 Binetova formula

Binet je 1843. godine izveo formulu za eksplicitno računanje Fibonaccijevih brojeva. Formula nosi njegovo ime iako je stoljeće prije bila poznata Euleru, D. Bernoulliju i de Moivreu.

**Teorem 1.2.1** (Binetova formula za Fibonaccijeve brojeve)**.** *Vrijedi*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

*za sve* $n \geq 0$*.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je

$$F_n = xF_{n-1},$$

za neku konstantu $x \in \mathbb{R}$ i sve $n \in \mathbb{N}$. Tada iz rekurzivne relacije (1.1) slijedi

$$x^2 F_{n-2} = xF_{n-2} + F_{n-2},$$

odnosno

$$x^2 = x + 1. \tag{1.2}$$

Neka je sada $x$ rješenje kvadratne jednadžbe (1.2). Tada dobivamo redom

$$\begin{aligned}
x^3 &= x^2 + x = 2x + 1,\\
x^4 &= x^3 + x^2 = (2x+1) + (x+1) = 3x + 2,\\
x^5 &= x^4 + x^3 = (3x+2) + (2x+1) = 5x + 3,\\
x^6 &= x^5 + x^4 = (5x+3) + (3x+2) = 8x + 5,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

gdje opažamo Fibonaccijeve brojeve u ulozi koeficijenata s desne strane jednadžbi. Općenito,

$$x^n = xF_n + F_{n-1}. \tag{1.3}$$

Pokažimo indukcijom da relacija (1.3) vrijedi za sve $n \geq 2$. Očito vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da vrijedi vrijedi za $n \geq 2$ i pokažimo da vrijedi za $n + 1$:

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x \cdot x^n = \{\text{P.I.}\} = x(xF_n + F_{n-1}) = x^2 F_n + xF_{n-1}\\
&= (x+1)F_n + xF_{n-1} = x(F_n + F_{n-1}) + F_n = xF_{n+1} + F_n.
\end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe (1.2) su

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ovi brojevi zadovoljavaju relaciju (1.3), pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\alpha^n &= F_n\alpha + F_{n-1},\\
\beta^n &= F_n\beta + F_{n-1}.
\end{aligned}$$

Oduzimanjem prethodnih relacija i dijeljnjem s $\alpha - \beta$ dobivamo

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

□

**Korolar 1.2.2** (Binetova formula za Lucasove brojeve)**.** *Vrijedi*

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

*za sve* $n \geq 0$.

*Dokaz.* Prema Propoziciji 1.1.5 (a) je

$$L_n = F_n + 2F_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + 2\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha + 2) - \beta^{n-1}(\beta + 2)}{\alpha - \beta}.$$

Uočimo da je

$$\alpha + 2 = \alpha + 1 + 1 = \alpha^2 - \alpha\beta = \alpha(\alpha - \beta),$$

jer je

$$\alpha\beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -1,$$

te

$$\alpha^2 = \alpha + 1.$$

Analogno je

$$\beta + 2 = \beta(\beta - \alpha).$$

Stoga je

$$L_n = \frac{\alpha^n(\alpha - \beta) - \beta^n(\beta - \alpha)}{\alpha - \beta} = \alpha^n + \beta^n.$$

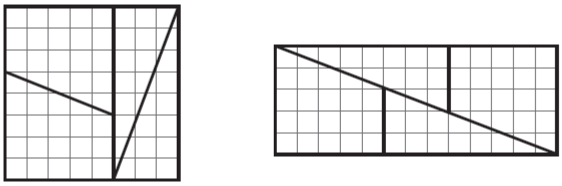
□

## 1.3 Identiteti

**Primjer 1.3.1.** *U ovom primjeru opisat ćemo jednu poznatu zagonetku. Šahovska ploča 8 x 8 podijeli se na četiri dijela kao na Slici 1.1. Kad se ti dijelovi preslože, oni popunjavaju pravokutnik dimenzija 13x5. Drugim riječima, 64 kvadratića se rezanjem transformiraju u 65 kvadratića! Kako je to moguće?*

*Možemo primijetiti da su 3, 5, 8 i 13, dimenzije koje iščitavamo s ovih slika, uzastopni članovi Fibonaccijeva niza. Ovaj parodoks ima veze s identitetom za Fibonaccijeve brojeve kojeg zovemo Cassinijev identitet i glasi*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$



Slika 1.1: Paradoks s kvadratićima

*Ovaj identitet daje uputu kako načiniti rezanja kvadrata slična upravo opisanom. Brojeve 3, 5, 8, 13 zamijenit ćemo s $F_{n-2}$, $F_{n-1}$, $F_n$ i $F_{n+1}$. To znači da stranica kvadrata ima duljinu $F_n$. Ona se podijeli vertikalnim rezom na dva trokuta, a veći na dva trapeza, kojima je kraći brid $F_{n-2}$ a dulji brid $F_{n-1}$. Zatim se trapezi i trokuti preslože u pravokutnik sa stranicama $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ i $F_{n-1}$. Pritom jedan kvadratić nestane ili se pojavi ni od kud, ovisno o tome je li n neparan ili paran broj.*

Sada ćemo pokazati formulu spominjanu u prethodnom primjeru koju je dokazao francuski astronom Jean-Dominique Casssini 1680. godine.

**Teorem 1.3.2** (Cassinijev identitet)**.** *Vrijedi*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \tag{1.4}$$

*za sve $n \in \mathbb{N}$.*

*Dokaz.* On se može dokazati indukcijom. Za $n = 1$ je istinit, jer je

$$F_0F_2 - F_1^2 = -1 = (-1)^1.$$

Pretpostavimo da identitet vrijedi za neki prirodan broj $n$. Onda dobivamo

$$\begin{aligned} F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

to jest uvjerili smo se da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. □

**Korolar 1.3.3.** *Vrijedi*

**(a)** $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$,

**(b)** $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$,

*za sve* $n \in \mathbb{N}$.

*Dokaz.*

(a) U (1.4) zamijenimo $F_{n-1}$ s $F_{n+1} - F_n$.

(b) Vrijedi

$$4(-1)^n = 4F_{n+1}^2 - 4F_{n+1}F_n - 4F_n^2 = (2F_{n+1} - F_n)^2 - 5F_n^2 = (F_{n+1} + F_{n-1})^2 - 5F_n^2.$$

Kako je $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ prema Propoziciji 1.1.5 (b), slijedi tvrdnja. □

Dat ćemo još jedan zanimljiv dokaz Cassinijevog identiteta pomoću matrica reda 2 čiji su elementi Fibonaccijevi brojevi. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Računanjem potencija matrice $A$ dobivamo redom

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\ \ldots$$

pa možemo pretpostaviti

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Prethodnu pretpostavku lako pokazujemo indukcijom. Budući da je baza očita, korak indukcije je

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \{\text{P.I}\} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}.$$

Nadalje, tvrdnja slijedi direktno iz Binet-Cauchyjevog teorema koji kaže da je determinanta umnoška matrica jednaka umnošku determinanti, odnosno

$$\det(A^n) = (\det A)^n,$$

pa je

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Iskoristimo Fibonaccijeve matrice za još neke zanimljive identitete. Kako je $A^nA^m = A^{n+m}$, slijedi

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_{n+1}F_{m+1} + F_nF_m & F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} \\ F_nF_{m+1} + F_{n-1}F_m & F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Stoga smo pokazali sljedeću tvrdnju.

**Propozicija 1.3.4.** *Vrijedi*

$$F_{m+n} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n,$$

*za sve* $n, m \geq 1$.

Slijede identiteti vezani uz sume Fibonaccijevih brojeva. Njih pokazujemo metodom *teleskopiranja*, vrlo jednostavnom metodom koju ćemo u našem slučaju primijeniti na rekurzije za Fibonaccijeve brojeve.

**Propozicija 1.3.5.** *Vrijedi*

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,$$

*za* $n \geq 0$.

*Dokaz.* Formulu dobivamo zbrajanjem sljedećih osnovnih relacija

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_3 - F_2, \\
F_2 &= F_4 - F_3, \\
&\vdots \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n, \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}.
\end{aligned}$$

□

**Propozicija 1.3.6.** *Vrijedi*

**(i)** $F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \cdots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$

**(ii)** $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$

*za* $n \geq 1$.

*Dokaz.* **(i)** Prema Propoziciji 1.3.5 je

$$\underbrace{F_0 + F_1}_{F_2} + \underbrace{F_2 + F_3}_{F_4} + \underbrace{F_4 + F_5}_{F_6} \cdots + \underbrace{F_{2n-2} + F_{2n-1}}_{F_{2n}} = F_{2n+1} - 1.$$

**(ii)** Slično,

$$\underbrace{F_1 + F_2}_{F_3} + \underbrace{F_3 + F_4}_{F_5} + \underbrace{F_5 + F_6}_{F_7} \cdots + \underbrace{F_{2n-3} + F_{2n-2}}_{F_{2n-1}} = F_{2n} - 1 = F_{2n} - F_1.$$

□

**Primjer 1.3.7.** *Kvadrati Fibonaccijevih brojeva tvore ovu zanimljivu shemu*

$$\begin{aligned}
1^2 + 1^2 &= 1 \cdot 2 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 &= 2 \cdot 3 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 &= 3 \cdot 5 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 &= 5 \cdot 8 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 &= 8 \cdot 13 \\
1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 &= 13 \cdot 21
\end{aligned}$$

**Propozicija 1.3.8.** *Vrijedi*

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1},$$

*za* $n \geq 0$

*Dokaz.* Svaku od osnovnih relacija pomnožimo s $F_1$, $F_2$, ..., do $F_n$ redom

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_2 - F_0 \Big/ F_1, \\
F_2 &= F_3 - F_1 \Big/ F_2, \\
&\vdots \\
F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \Big/ F_{n-1}, \\
F_n &= F_{n+2} - F_{n+1} \Big/ F_n,
\end{aligned}$$

pa zbrajanjem dobivenih jednakosti

$$\begin{aligned}
F_1^2 &= F_2F_1 - F_0F_1, \\
F_2^2 &= F_3F_2 - F_1F_2, \\
&\vdots \\
F_{n-1}^2 &= F_{n+1}F_{n-1} - F_nF_{n-1}, \\
F_n^2 &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_n,
\end{aligned}$$

slijedi tvrdnja. □

**Propozicija 1.3.9.** *Vrijedi*

**(i)** $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$,

**(ii)** $F_n^2 - F_{n-2}^2 = F_{2n-2}$.

*Dokaz.* Pokazat ćemo identitet (i) pomoću principa matematičke indukcije, a (ii) se pokazuje analogno. Za $n = 0$ je

$$F_0^2 + F_1^2 = 0 + 1 = 1 = F_1,$$

pa smo pokazali bazu. Prepostavimo da vrijedi relacija za neki $n \geq 0$ i pokažimo da vrijedi za $n + 1$. Dakle,

$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = F_{n+1}^2 + (F_{n+1} + F_n)^2 = 2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2.$$

Prema pretpostavci indukcije je

$$2F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + F_n^2 = F_{2n+1} + F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) + F_{n+1}F_n = F_{2n+1} + F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}F_n.$$

Propozicija 1.3.4 za $m = n + 2$ daje

$$F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}F_n = F_{2n+2},$$

pa je

$$F_{2n+1} + F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}F_n = F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n+3},$$

odnosno

$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = F_{2n+3} = F_{2(n+1)+1}.$$

□

## 1.4 Djeljivost

Kako su Fibonaccijevi brojevi prirodni brojevi, oni se mogu proučavati u sklopu teorije brojeva - grane matematike koja se bavi svojstvima prirodnih, odnosno cijelih brojeva. Jedan od osnovnih pojmova u toj grani je pojam djeljivosti. U ovom odjeljku razmatrat će se upravo djeljivost Fibonaccijevih brojeva.

Najveću zajedničku mjeru prirodnih brojeva a i b označavat ćemo s $(a, b)$.

**Propozicija 1.4.1.** *Svaka dva uzastopna Fibonaccijeva broja su relativno prosti.*

*Dokaz.* Za $n \in \mathbb{N}$, stavimo $d = (F_n, F_{n+1})$. Kako $d$ dijeli $F_n$ i $F_{n+1}$, onda $d$ dijeli i

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}.$$

Dalje, zaključujemo da $d$ dijeli redom

$$F_n - F_{n-1} = F_{n-2},\ F_{n-1} - F_{n-2} = F_{n-3},\ \ldots, F_3 - F_2 = F_1 = 1.$$

Stoga je $d = 1$, što je i trebalo dokazati. □

**Propozicija 1.4.2.** *Neka su $m$ i $n$ prirodni brojevi. Ako $n$ dijeli $m$, onda $F_n$ dijeli $F_m$.*

*Dokaz.* Neka je $m = nk$. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po $k$. Za $k = 1$ tvrdnja je očito točna jer $F_n | F_n$. Pretpostavimo da $F_n | F_{nk}$. Tada je prema Propoziciji 1.3.4

$$F_{n(k+1)} = F_{nk+n} = F_{nk-1}F_n + F_{nk}F_{n+1}.$$

Prvi pribrojnik u ovom zbroju očito je djeljiv s $F_n$, a drugi je djeljiv s $F_n$ po pretpostavci indukcije. Zato zaključujemo da $F_n | F_{n(k+1)}$ , što je i trebalo dokazati. □

**Korolar 1.4.3.** *Ako je $n$ složen prirodan broj različit od 4, onda je $F_n$ složen broj.*

*Dokaz.* Ako je broj $n$ složen, onda se on može zapisati u obliku $n = ab$, gdje su $a, b > 1$. Kako je $n \neq 4$, to je bar jedan od brojeva $a$ i $b$ veći od 2. Recimo da je $a > 2$. Tada je $F_a \neq F_n$ i $F_a \neq 1$, a prema Propoziciji 1.4.2 znamo da $F_a | F_n$. To znači da je $F_n$ složen. □

Napomenimo da obrat tvrdnje iz Korolara 1.4.3 ne vrijedi. Naime, može se dogoditi da je broj $p$ prost, a da je broj $F_p$ složen. Najmanji takav broj je $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$. Nadalje, ako je $F_n$ prost i $n > 4$, onda je nužno $n = p$ prost. Niz prvih nekoliko prostih Fibonaccijevih broja glasi

$$2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229, 433494437, 2971215073, \ldots$$

Prirodno je postaviti pitanje postoji li beskonačno mnogo Fibonaccijevih brojeva koji su prosti. Do sada se ne zna odgovor na to pitanje, odnosno to je još jedan od otvorenih problema u matematici. Sluti se da je odgovor pozitivan. Najveći poznati prosti Fibonaccijev broj je $F_p$ za $p = 81\,839$ broj s 17 103 znamenaka. Neprestano traje potraga za sve većim prostim Fibonaccijim brojevima. S velikom vjerojatnošću se smatra i da je 606 974-znamenkasti broj $F_{2\,904\,353}$ također prost.

**Teorem 1.4.4.** *Neka je $m$ prirodan broj. Niz ostataka Fibonaccijevih brojeva pri dijeljenju s $m$ je periodičan.*

*Ako je $k$ osnovni period tog niza, to jest ako je $k$ najmanji prirodni broj sa svojstvom da je $F_{n+k} \equiv F_n \pmod{m}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je $k \leq m^2$.*

*Dokaz.* Ostatak pri dijeljenju broja $a$ s $m$ označimo s $a \mod m$.Očito je

$$a \mod m \in \{0, 1, 2, \dots m - 1\}.$$

Promotrimo sada niz uređenih parova

$$(F_1 \mod m, F_2 \mod m), (F_2 \mod m, F_3 \mod m), (F_3 \mod m, F_4 \mod m), \dots$$

U tom nizu ima najviše $m^2$ različitih članova. Naime, na prvo mjesto u uređenom paru može doći neki od $m$ ostataka, a također i na drugo mjesto. Sada prema Dirichletovu principu, odnosno *principu kutija* zaključujemo da između prvih $m^2 + 1$ članova ovog niza postoje barem dva jednaka. Neka je

$$(F_t \mod m, F_{t+1} \mod m) = (F_s \mod m, F_{s+1} \mod m),$$

Gdje je $1 \leq s < t \leq m^2 + 1$. To znači da je $F_t \equiv F_s \pmod m$ i $F_{t+1} \equiv F_{s+1} \pmod m$. Iz $F_{t-1} = F_{t+1} - F_t$ i $F_{s-1} = F_{s+1} - F_s$ slijedi

$$F_{t-1} = F_{t+1} - F_t \equiv F_{s+1} - F_s = F_{s-1} \pmod m,$$

$$F_{t-2} = F_t - F_{t-1} \equiv F_s - F_{s-1} = F_{s-2} \pmod m,$$
$$F_{t-3} = F_{t-1} - F_{t-2} \equiv F_{s-1} - F_{s-2} = F_{s-3} \pmod m,$$
$$\vdots$$
$$F_{t-(s-2)} = F_{t-(s-2)+2} - F_{t-(s-2)+1} \equiv F_{s-(s-2)+2} - F_{s-(s-2)+1} = F_4 - F_3 = F_2 \pmod m,$$
$$F_{t-(s-1)} = F_{t-(s-1)+2} - F_{t-(s-1)+1} \equiv F_{s-(s-1)+2} - F_{s-(s-1)+1} = F_3 - F_2 = F_1 \pmod m.$$

Ako stavimo $l = t - s > 0$ iz zadnje dvije kongruencije imamo

$$F_{l+2} \equiv F_2 \equiv 1 \pmod m, \; F_{l+1} \equiv F_1 \equiv 1 \pmod m.$$

Sada zbrajanjem prethodne dvije kongruencije dobivamo

$$F_{l+3} = F_{l+2} + F_{l+1} \equiv F_2 + F_1 = F_3 \pmod m.$$

Stoga iz definicije Fibonaccijevih brojeva indukcijom slijedi da je

$$F_{n+l} \equiv F_n \pmod m,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, što upravo znači da je $l$ period niza $(F_n \mod m)$. Konačno, kako je $k$ temeljni period, onda je $k \leq l = t - s$ i $k \leq m^2$. □

**Korolar 1.4.5.** *Za svaki prirodan broj $m$ vrijedi da između prvih $m^2$ Fibonaccijevih brojeva postoji barem jedan djeljiv s $m$.*

*Dokaz.* U Teoremu 1.4.4 smo pokazali da za osnovni period $k$ niza ostataka Fibonaccijevih brojeva pri dijeljenju s $m$ vrijedi da je $k \leq m^2$ i

$$F_{k+1} \equiv F_1 \pmod{m}, \; F_{k+2} \equiv F_2 \pmod{m}.$$

Oduzimanjem prethodnih kongruencija slijedi

$$F_k \equiv F_2 - F_1 \equiv F_0 \equiv 0 \pmod{m},$$

što znači da je $F_k$ djeljiv s $m$. □

# Poglavlje 2

# Fibonaccijevi brojevi oko nas

## 2.1 Zlatni rez

Zlatni rez je matematičko-strukturalni pojam kojeg se najčešće povezuje uz umjetnost budući da je u povijesti umjetnosti i najčešće korišten, a usko je vezan uz sklad, savršenstvo, ravnotežu.


Slika 2.1: Dijeljenje dužine u omjeru zlatnog reza

Kažemo da točka $C$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u *omjeru zlatnog reza* ako je omjer duljine cijele dužine ($|AB| = x + y$) prema većem dijelu ($|AC| = x$) jednak omjeru većeg dijela ($|AC| = x$) prema manjem dijelu ($|CB| = y$). Konkretno, pišemo

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \varphi.$$

Otuda je

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi,$$

odnosno

$$\varphi^2 - \varphi - 1.$$

Dakle, zlatni rez $\varphi$ je pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe

$$x^2 - x - 1 = 0$$

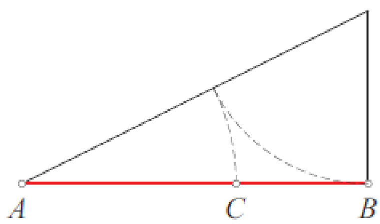
koja se ponekad naziva *zlatna jednadžba*, to jest

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398\ldots.$$

Prisjetimo se da smo ovu istu jednažbu dobili prilikom određivanja eksplicitne formule za Fibonaccijeve brojeve (vidi (1.2)). Tamo je bilo $\alpha = \varphi$. O toj vezi bit će više u sljedećem odjeljku.

Opisat ćemo nekoliko konstrukcija zlatnog reza.

### Jednostavna konstrukcija ravnalom i šestarom




Slika 2.2: Jednostavna konstrukcija

Neka je dana dužina $\overline{AB}$. U točki $B$ konstruirajmo okomicu na $\overline{AB}$ te na toj okomici istaknimo točku $D$ takvu da je $|AB| = 2|BD|$. Kružnica sa središtem u $D$ polumjera $|BD|$ siječe dužinu $\overline{AD}$ u točki $E$. Nadalje, kružnica sa središtem u $A$ polumjera $|AE|$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki $C$. *Točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru.*

Zaista, $\triangle ABC$ je pravokutan pa prema Pitagorinu teoremu i pretpostavci imamo

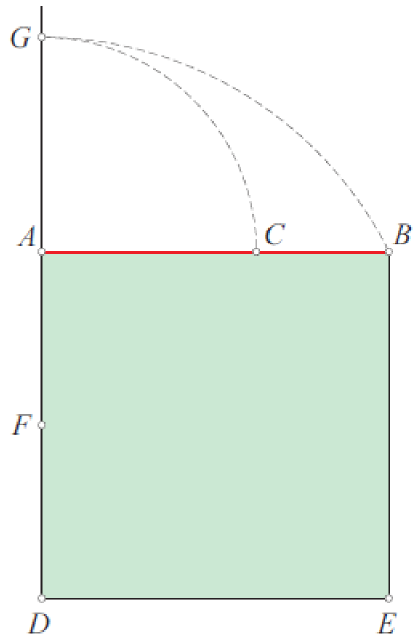
$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 = 5|BD|^2.$$

Nadalje,

$$|AC| = |AE| = |AD| - |DE| = |AD| - |BD| = (\sqrt{5}-1)|BD|.$$

Sada je

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2|BD|}{|BD|(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi.$$




Slika 2.3: Eulerova konstrukcija

### Eulerova konstrukcija

Konstruirajmo kvadrat $DEBA$ te označimo s $F$ polovište dužine $\overline{AD}$. Kružnica sa središtem u $F$ polumjera $|FB|$ siječe polupravac $FA$ u točki $G$. Kružnica sa središtem u $A$ polumjera $|AG|$ siječe $\overline{AB}$ u točki $C$. *Točka $C$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru.*

Zaista, trokut $AFB$ je pravi i prema pretpostavci je $|AB| = 2|AF|$ pa je

$$|FB|^2 = |AB|^2 + |AF|^2 = 5|AF|^2.$$

Nadalje,

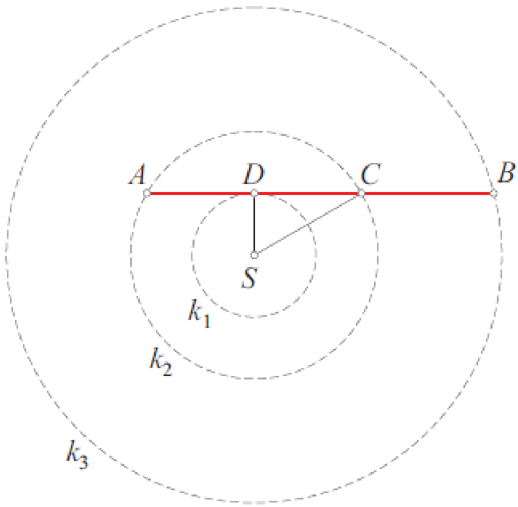
$$AC| = |AG| = |FG| - |AF| = |FB| - |AF| = (\sqrt{5} - 1)|AF|.$$

Kako je $|AB| = 2|AF|$, slijedi

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \varphi.$$

### Konstrukcija pomoću koncentričnih kružnica

Neka su $k_1$ , $k_2$ i $k_3$ tri koncentrične kružnice čiji se polumjeri odnose u omjeru $1 : 2 : 4$. Konstruirajmo tangentu na kružnicu najmanjeg polumjera ($k_1$) u točki $D$. Tangenta siječe




Slika 2.4: Konstrukcija pomoću koncentričnih kružnica

kružnicu $k_2$ u točkama $A$ i $C$. Polupravac $AC$ siječe kružnicu $k_3$ u točki $B$. *Točka C dijeli dužinu* $\overline{AB}$ *u zlatnom omjeru.*

Prema konstrukciji, polumjeri kružnica $k_1$, $k_2$ i $k_3$ su

$$r_1 = k, \; r_2 = 2k, \; r_3 = 4k,$$

redom za a neki $k$. Trokuti $CDS$ i $BDS$ su pravi pa vrijedi

$$|DC| = \sqrt{r_2^2 - r_1^2} = \sqrt{3}k,$$

$$|DB| = \sqrt{r_3^2 - r_1^2} = \sqrt{15}k.$$

Sada je

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD| + |DB|}{|AD| + |DC|} = \frac{|DC| + |DB|}{2|DC|} = \frac{\sqrt{3}k + \sqrt{15}k}{2\sqrt{3}k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

## 2.2 Veza Fibonaccijevih brojeva i zlatnog reza

Promotrimo tablicu u kojoj su dani omjeri susjednih Fibonaccijevih brojeva:

| $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ |
|---|
| $\frac{2}{1} = 2.000000\ldots$ |
| $\frac{3}{2} = 1.500000\ldots$ |
| $\frac{5}{3} = 1.666667\ldots$ |
| $\frac{8}{5} = 1.600000\ldots$ |
| $\frac{13}{8} = 1.625000\ldots$ |
| $\vdots$ |
| $\frac{987}{610} = 1.618033\ldots$ |
| $\frac{1597}{987} = 1.618034\ldots$ |

Već iz ovog malog broja primjera omjera susjednih Fibonaccijevih brojeva, možemo zaključiti da je smisleno pretpostaviti da je niz $(F_{n+1}/F_n)$ konvergentan te da konvergira upravo zlatnom rezu. Ovu zanimljivu činjenicu prvi je otkrio Johannes Kepler još u 17. stoljeću.

Koristeći Binetovu formulu iz odjeljka 1.2 za Fibonacijeve brojeve dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - \beta(\beta/\alpha)^n}{1 - (\beta/\alpha)^n} = \alpha = \varphi,$$

jer

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}} < 1$$

povlači da

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0.$$

Analogno se može pokazati da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n} = \varphi.$$

## 2.3 U likovnoj umjetnosti

Možemo se pitati zbog čega dijeljenje jedne linije na dva dijela, koji su u odnosu tako da se manji dio odnosi prema većem dijelu kao veći prema cjelini, pokazuje više sklada od ostalih omjera s kojima se susrećemo. Zašto se češće susrećemo u arhitekturi, umjetnosti s geometrijskim likovima koji proizlaze iz zlatnog presjeka kao što su zlatni trokut, zlatni pravokutnik, pravilni peterokut, pravilni deseterokut, itd. Jedan od razloga je taj da su matematičari iz ranijih vremena tražili univerzalnu matematičku formulu ljepote, koju su našli upravo u zlatnom omjeru.

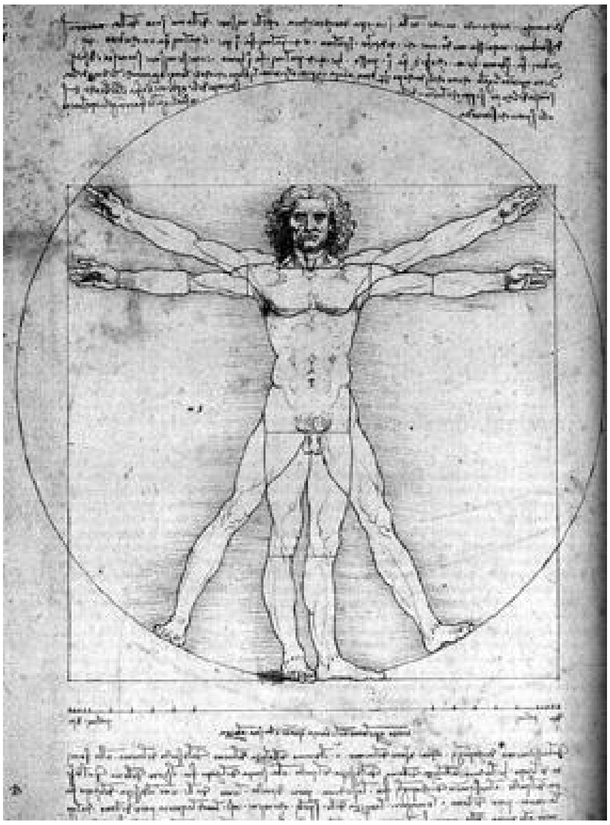
Zlatni rez daje umjetničkom djelu osobito ugodan i lijep oblik, a ujedno služi kao most prema Fibonaccijevim brojevima. Grčki Partenon u Ateni je simbol univerzalnosti savršenih proporcija. U njegovim mjerama krije se zlatni omjer. Ako bi se skicirao pravokutnik koji obuhvaća frontalni pogled na Partenonu, to bi upravo bio *zlatni pravokutnik*. Dakle, pravokutnik čija su dužina i širina u zlatnom omjeru. Mnogi su umjetnici rabili zlatni pravokutnik u svojim umjetničkim djelima. Slika *Adam i Eva* glasovitog srednjovjekovnog umjetnika Albrechta Durera (1471.-1528.) npr. sadrži likove koje možemo smjestiti u zlatni pravokutnik.

Leonardo da Vinci[1] (1452.-1519.) ilustrirao je knjigu *De Divina proportione*[2] francuskog redovnika i matematičara fra Luce Paciolija (ca. 1445.-1517.) u kojoj se za zlatni omjer vežu božanske osobine. Taj crtež podržavao je Paciolijevu raspravu o rimskom arhitektu Vitruviju[3] (ca. 84.-27. pr. Kr.) čiji dokumenti o arhitekturi potvrđuju da je vjerovao

[1]Poznati talijanski slikar, kipar, arhitekt, znanstvenih i inženjer.

[2]Luca Pacioli, De divina proportione (Venecija, 1509; ponovno tiskano u Milanu in 1896, Gardner Pelican, 1961).

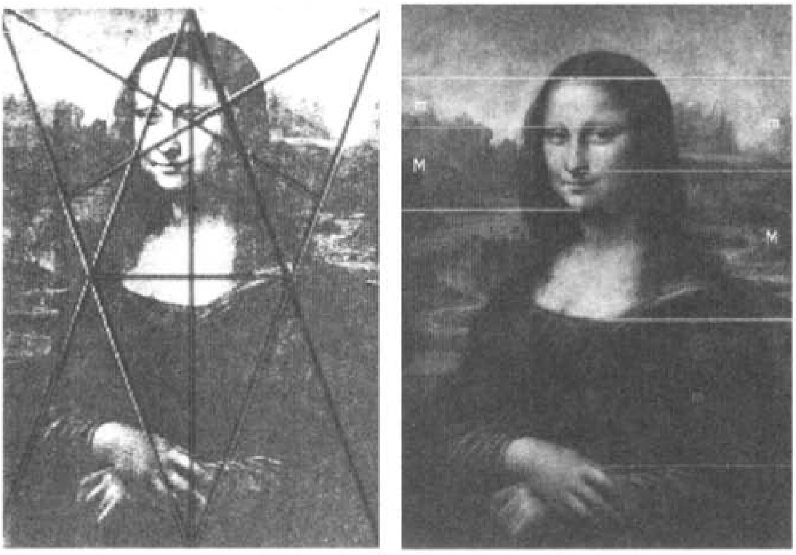
[3]Vitruvius Pollio, rimski tehničar oružanih snaga i inženjer. Objavio je deset knjiga o arhitekturi i građevini i razvio teoriju proporcija.



Slika 2.5: Leonardo da Vinci: studija proporcija prema Vitruviju

da su proporcije ljudskog tijela osnova arhitekture. Omjer stranice kvadrata prema polumjeru kružnice na toj poznatoj slici odgovara zlatnom rezu s odstupanjem od 1.7%. Leonardo da Vinci konstruirao je proporciju ljudskog tijela na osnovi zlatnog reza kao što je prikazano na Slici 2.5. Nadalje, da Vinci je razdijelio ljudsko lice u trećine: čelo, središnji dio lica i bradu. Crtež nam kaže da je ljudsko tijelo moguće ucrtati u kružnicu i kvadrat. Visina čovjeka jednaka je širini rastvorenih mu ruku. Postavljanjem ruku i nogu u dijagonalu čovjek postaje središte kružnice. Potezi ispod koljena označavaju zlatni rez kao i na ramenima: od vrha prstiju do ramena, rame do prstiju druge ruke. Tako je i s glavom, tijelom i natkoljenicom. Ipak, Leonardo to nije sam izmislio. Crtež je zapravo interpretacija Vitruvijevih studija o proporcijama, koje su objedinjenje dotadašnjih antičkih spoznaja.

Iako postoji bezbroj primjera iz proteklih nekoliko stoljeća među kojima bi se mogle naći slične pojave zlatnog reza, jedan od zasigurno najpoznatijih primjera u likovnoj umjetnosti zapadne civilizacije je čuvena *Mona Lisa* Leonarda da Vincija. Naslikana između



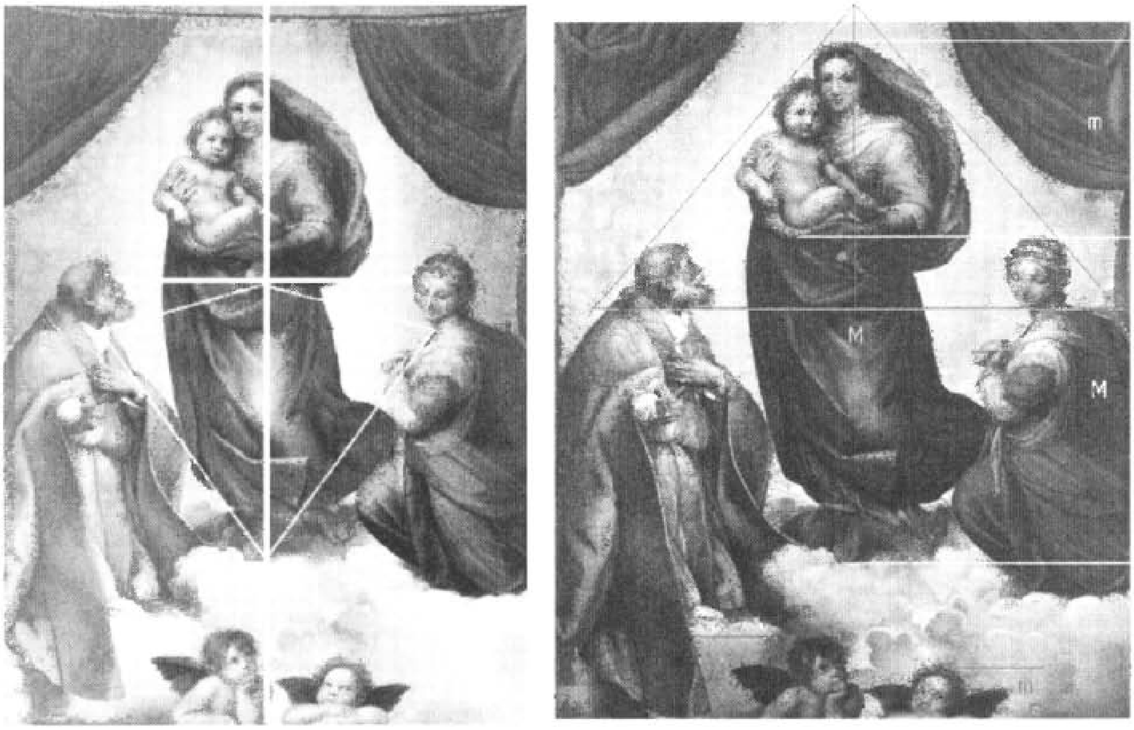
Slika 2.6: Mona Lisa

1503. i 1506. i čuva se u muzeju Louvre u Parizu, a francuski kralj Franjo 1. platio ju je s 15.3 kilograma zlata. Ako se sagleda ovo remek-djelo iz perspektive zlatnog omjera, uočava se da se može nacrtati pravokutnik oko Mona Lisinog lica, i upravo taj pravokutnik je zlatni pravokutnik. Na lijevoj slici u 2.6 može se primijetiti nekoliko trokuta; dva najveća trokuta su zlatni trokuti. Na tijelu Mona Lise istaknute su specifične točke koje upućuju na zlatni rez (desna slika u 2.6).

Još jedan veliki slikar Rafael (1483.-1520.) također prikazuje zlatni rez na svojoj Sikstinskoj *Madoni* (1513.). Horizontalna linija označena na lijevoj slici u 2.7, koja izlazi iz očiju pape Siksta II. i glave sv. Barbare, dijeli visinu slike na zlatni rez i također dijeli figuru Madone na dva jednaka dijela. Na desnoj slici u 2.7 može se primijetiti da je Madonina figura također podijeljena zlatnim rezom. Također jednakokračni trokut točno obuhvaća četiri glave ima svojstvo da je omjer baze i visine približno jednak zlatnom rezu. Je li Rafael svjesno odabrao ove dimenzije sa zlatnim rezom, ili su one bile tek proizvod umjetničkog oka, ostaje majstorova tajna.

Na Slici 2.8 jasno je vidljivo da je pravilni peterokut uklopljen u Rafaelovu sliku *Madonna Alba* (1511.-1513.). Ovo još jednom pokazuje Rafaelovu sklonost prema zlatnom rezu koji je ukomponiran u pravilni peterokut.

Još je mnogo drugih primjera iz područja umjetnosti koji svjedoče o prisutnosti zlatnog



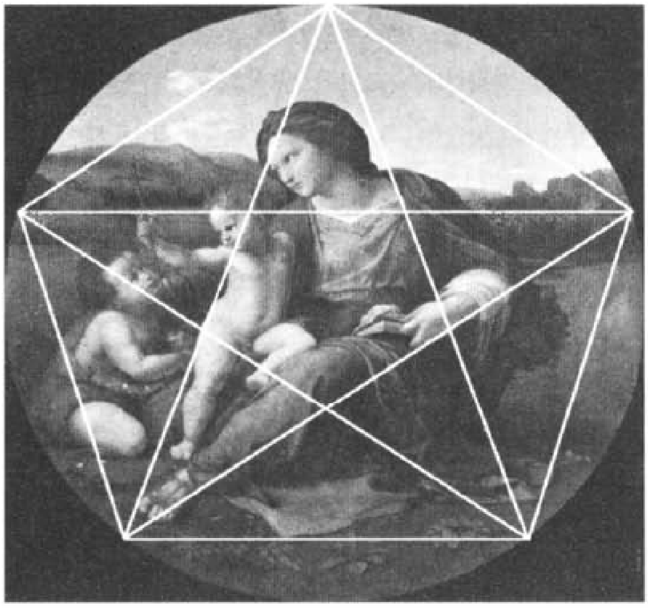
Slika 2.7: Sikstinska Madona

reza u remek-djelima. Jedno od najpoznatijih umjetničkih djela koje predstavlja grčku boginju ljubavi i ljepote, Afroditu, isklesana od mramora čuva se u muzeju u Louvreu u Parizu, na kojem njezin pupak dijeli cijelu figuru na zlatni omjer. Je li ovo bilo slučajno ili namjerno, teško je reći.

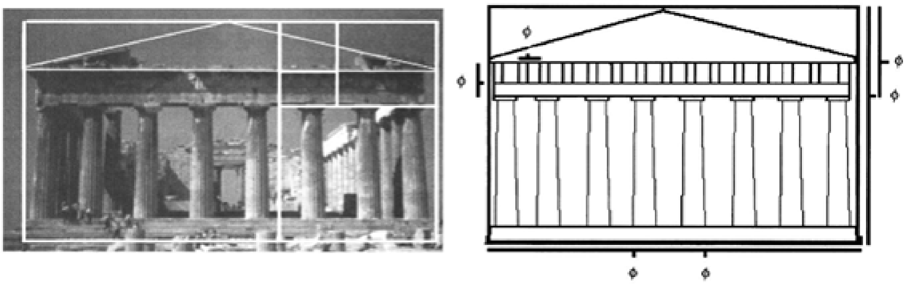
## 2.4 U arhitekturi

Godinama su arhitekti rabili zlatni omjer u svojim crtežima, ponekad kao zlatni pravokutnik, a ponekad kao indikator odjeljenja. Zlatni pravokutnici koji su konstruirani tipično su uključivali dimenzije koje su bile Fibonaccijevi brojevi. Zlatni omjer, kao ideal, nikad nije blisko ostvaren, budući da se omjer dva uzastopna Fibonaccijeva broja približava zlatnom omjeru, s tim da što su veći Fibonaccijevi brojevi, to je približavanje veće.

Možda je najpoznatija građevina koja pokazuje zlatni omjer već spomenuti Partenon na Akropoli u Ateni. Umjetnički koncept za gradnju ove veličanstvene građevine dolazi od Fidije (460.-430. pr. Kr.). Sagrađena je kao znak zahvale Periklu (500.-429. pr. Kr.) što



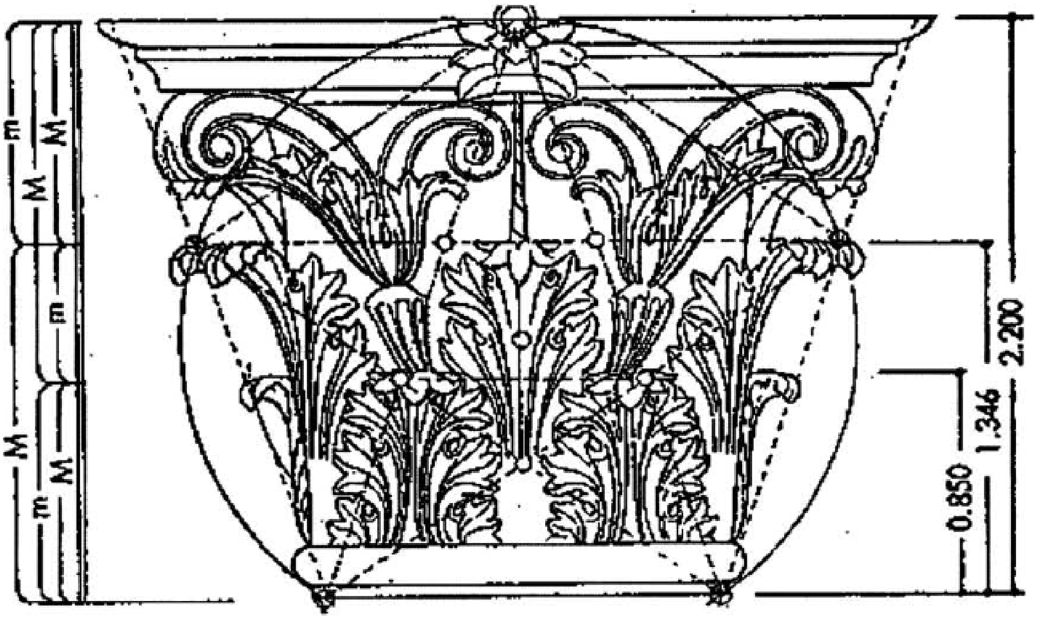
Slika 2.8: Madonna Alba i zlatni rez



Slika 2.9: Partenon u zlatnom pravokutniku

je spasio Atenu tijekom Perzijskog rata (447.-432. pr. Kr.). Svrha ovog hrama je bila da čuva kip božice Atene. Vjeruje se da je današnja oznaka za zlatni omjer $\varphi$ došla od prvog slova Fidijinog imena, iako ne postoje dokazi da je Fidija bio svjestan zlatnog omjera, već se samo može pretpostaviti iz oblika građevine. Kao što se može vidjeti na 2.9, Partenon se lijepo uklapa u zlatni pravokutnik. Ako se uzmu mjere različitih ukrasa iznad stupova, zlatni omjer se stalno pojavljuje. Slika 2.9 pokazuje zlatni omjer širom Partenona. Do koje su mjere drveni arhitekti svjesno koristili zlatni pravokutnik još je uvijek uglavnom misterij. Neki vjeruju da moderni arhitekti samo traže načine da nametnu zlatni pravokutnik određenoj građevini, iako nitko ne može zanijekati njegovu prisutnost.

Još jedan primjer zlatnog omjera može se vidjeti na Hadrijanovom luku na hramu Propilej, također smještenom na Akropoli. Raspored puževa i drugih ukrasa na vrhu luka pokazuje zlatni omjer kroz pravilni peterokut koji se može uklopiti kao na Slici 2.10 (može se primijetiti da M predstavlja veći dio zlatnog omjera, dok m predstavlja manji dio).




Slika 2.10: Hadrijanov luk u peterokutu

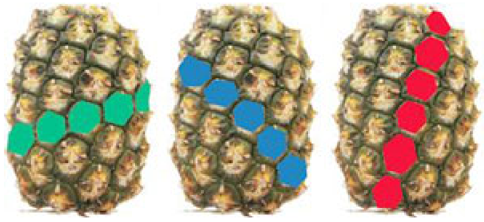
Ostali primjeri zlatnog reza mogu se pronaći u konstrukcijama veličanstvenih piramida kao što su npr. Keopsova piramida u Gizi koja je, prema grčkom povjesničaru Herodotu (ca. 490.-425. pr. Kr.), bila konstruirana tako da je kvadrat visine jednak površini jedne od lateralnih strana. Promatrači su primijetili zlatni omjer na meksičkim piramidama, japanskim pagodama, čak i na Stonehengeu (ca. 2800. pr. Kr.) u Engleskoj. Nadalje, postoje spekulacije da je Slavoluk pobjede u starom Rimu sagrađen na temelju zlatnog omjera. Tijekom renesanse, nacrti mnogih građevinskih projekata koristili su Fibonaccijeve brojeve ili zlatni omjer. Može ih se pronaći na nacrtima kupole katedrale Santa Maria del Fiore u Firenci (Slika 2.11). Kupolu je konstruirao Fillippo Brunelleschi (1337.-1446.) i ima visinu od 91 m te promjer od 45.52 m, što, nažalost, ne daje zlatni omjer. Gruba skica Giovannija di Gherarda da Pratoa (1426.) pokazuje Fibonaccijeve brojeve, 55, 89, i 144, kao i 17 (što je polovica Fibonaccijevog broja 34) te 72 (što je polovica Fibonaccijevog broja 144).

Slika 2.11: Kupola katedrale Santa Maria del Fiore u Firenzi

## 2.5 U svijetu biljaka

### Ananas

Fibbonaccijevi brojevi se također često pojavljuju u svijetu biljaka. Ako se uzme, npr., ananas, može se vidjeti da šesterokutne ljuske na ananasu tvore spirale u tri različita smjera. U tri smjera postoji 5, 8 i 13 spirala što je prikazano na Slici 2.12, a to su tri uzastopna Fibonaccijeva broja.



Slika 2.12: Ananasi

Kod ananasa su se numerirali šesterokuti. Numeriranje je izvršeno prema sljedećem pravilu: najdonjem šesterokutu dodijeljen je broj 0, sljedeći prema visini šesterokut dobiva broj 1, zatim je sljedećem prema visini dodijeljen broj 2, itd. Šesterokut 42 je mrvicu viši od šesterokuta 37. Uočavaju se tri različite spirale: jedna ima šesterokute 0, 5, 10, . . . ; sljedeća ima šesterokute 0, 13, 26, . . . ; i treća spirala uključuje šesterokute 0, 8, 16. . . Razlika između pojedinih spirala je 5, 8, i 13, a to su upravo Fibonaccijevi brojevi.

## Šišarka

Postoji nekoliko vrsta šišarki (npr. smreka; duglazija; ariš), i većina ih ima spirale u dva smjera, kao što se može vidjeti u tablici 6.1. Raspored spirala klasificiran je brojem vidljivih spirala koje pokazuju, a koji su najčešće dva sukcesivna Fibonaccijeva broja u svakom od smjerova. Kada je to slučaj[4], tada kut između sukcesivnih listova ili botaničkih elemenata je blizu „zlatnom kutu", približno oko 137.5° stupnjeva, što je u vezi sa zlatnim rezom. Veza između zlatnog kuta i Fibonaccijevih brojeva može se vidjeti u omjeru $137.5°/360°$, što postaje neposredno vidljivo kad se razlomak prikaže kao: $137.5°/360° = 55/144$ .

Ove šišarke imaju osam spirala u jednom smjeru i trinaest u drugom. Još jednom se da uočiti da su to Fibonaccijevi brojevi.

| Vrsta drva | Broj spirala u jednom smjeru | Broj spirala u drugom smjeru |
|---|---|---|
| smreka | 13 | 8 |
| duglazija | 3 | 5 |
| ariš | 5 | 3 |
| bor | 5 | 8 |

## Suncokret

Zanimljivo je da suncokret ima raznolike brojeve spirala. Što su cvjetovi stariji, to imaju više spirala. U svakom slučaju, broj spirala je Fibonaccijev broj. Obično su zastupljeni sljedeći parovi Fibonaccijevih brojeva: 12 (lijevo orijentirane spirale), 21 (desno orijentirane spirale), 21:34, 34:55, 55:89, 89:44. Na Slici 2.13 vidljivo je da je cvijet suncokreta oblikovan spiralama.

Može se uočiti da ovakav raspored oblikuje optimalno pakiranje sjemenja tako da, bez obzira koliko je veliko sjemenje, s tim da je sve sjemenje iste veličine, trebalo bi biti ravnomjerno pakirano u bilo kojem stadiju, što znači da nema naguravanja u središtu te da nije prerijetko blizu rubova. To pakiranje koje se "vidi" kao spirale obično uvijek znači da se

[4]U spiralnoj filotaksiji, botanički elementi rastu jedan po jedan, svaki u konstantnom kutu divergencije d u odnosu na prethodni. Ovo je najuobičajniji obrazac, i najčešće je kut divergencije $d$ blizu zlatnom kutu. Potonji slučaj uzrok je postojanju Fibonaccijeve filotaksije.

Slika 2.13: Suncokret

radi o susjednim Fibonaccijevim brojevima.

## Raspored listova – filotaksija

Na temelju literature koja obuhvaća 650 vrsta i 12.500 primjeraka, R. Jean[5] je procijenio da, među biljkama koje imaju spiralnu ili višelisnu filotaksiju , oko 92 posto njih ima Fibonaccijevu filotaksiju[6]. Ako se usredotoči na središte suncokreta ili, npr., tratinčice, mogu se uočiti latice koje okružuju središte. Većina biljaka imaju takav broj latica koji odgovara Fibonaccijevom broju. Naprimjer, ljiljan i perunika imaju 3 latice, kukuruzni neven ima 13 latica, neki ljetni zvjezdani imaju 21 latica, a tratinčice se mogu pronaći s 24, 55 ili 89 latica.

U nastavku je dan kratak popis nekih cvjetova napravljenog prema broju latica koje najčešće imaju:
3 latice: perunika, visibaba, ljiljan (neki ljiljani imaju 6 latica formiranih u dva seta od 3);
5 latica: ljutić, pakujac, divlja ruža, perčin, karanfil, cvijet jabuke i hibiskus;
8 latica: delphiniums, Cosmos bipinnatus, Coreopsis tinctoria;
13 latica: kukuruzni neven, cineraria, neke tratinčice, Jakobov staračac;
21 latica: ljetni zvjezdan, cikorija, Helianthus annuus;
34 latice: pyrethrum i druge tratinčice;
55, 89 latica: zvjezdan i druge glavočike.

---

[5]Roger. V. Jean, Roger V. Jean, Phyl/olaxis: A Syslemic SIudy in Plant Morphogenesis (Cambridge: Cambridge University Press, 1994).

[6]Iz grčkog: phyllo znači list, a taxis znači raspored.

Neke vrste, kao što je ljutić, vrlo su precizne s obzirom na broj latica koje imaju, no druge imaju latice koje su vrlo blizu gore navedenima i čiji je prosjek neki Fibonaccijev broj.

## Raspored listova kod palmi

Različite vrste borova imaju različite brojeve spirala listova, no brojevi se uvijek podudaraju s Fibonaccijevim brojevima. Npr. kod palme areka ili ukrasne palme Ptychosperma macarthurii samo jedna spirala listova je vidljiva, dok su kod šećerne palme (Arenga saccharifera) vidljive dvije spirale. Kod palme palmira (Borassus flabellifer), ili Coryphe elate, kao i u nizu drugih vrsta palmi, vidljive su tri jasne spirale. Kokosova palma (Cocos nucifera) kao i Copernicia imaju pet spirala, dok afrička uljarica (Elaeis guineensis) nosi osam spirala. Divlja datulja (Phoenix sylvestris) i nekoliko drugih vrsta palmi također imaju osam spirala. Na snažnim deblima kanarske otočne palme (Phoenix canariensis) može se vidjeti trinaest spirala. Također kod nekih od ovih biljaka, može se pronaći dvadeset i jedna spirala. Palme koje nose 4, 6, 7, 9, 10 ili 12 spirala listova nisu poznate.

Omjer filotaksije Fibonaccijevih brojeva nije zagarantiran kod svake biljke, no može se vidjeti na većini biljaka. Zašto se ovakvi rasporedi javljaju? Može se nagađati da su neki od ovih slučajeva povezani s maksimizacijom prostora za svaki list, ili s prosječnom količinom svjetla koja pada na svakog od njih. Čak i najmanja prednost počet će dominirati tijekom mnogih generacija. U slučaju usko poslaganih listova kupusa ili sukulenata, takav raspored može biti ključan za dostupnost prostora.

Mnogo toga je napisano o rasporedu listova, latica i drugih aspekata biljaka, no ranija djela su bila samo deskriptivna i nisu objašnjavala vezu između brojeva i rasta biljaka. Umjesto toga, bavila su se geometrijom rasporeda. Najdramatičniji uvid dolazi od objavljenog djela francuskih fizičara Stephanea Douadyja and Yvesa Coudera. Oni su razvili teoriju dinamike rasta biljaka koristeći računalne modele i laboratorijske eksperimente u vezi s Fibonaccijevim uzorkom. Douady i Couder također su pronašli dinamičko objašnjenje zlatnog kuta. Dobili su ovaj kut kao posljedicu jednostavnih zakona dinamike i nisu ga postulirali kao mnogi od njihovih prethodnika, koji su ga vidjeli kao posljedicu rasporeda koji štedi prostor.

## 2.6 Na ljudskom tijelu

Posljednje, ali ne i najmanje važno, postavlja se pitanje je li pojava Fibonaccijevih brojeva na ljudskom tijelu slučajna. Ljudsko biće ima jednu glavu, dvije ruke i tri zgloba na prstu, te pet prsta na svakoj ruci, a to su sve ni više ni manje nego Fibonacijevi brojevi. No, "mali" Fibonaccijevi brojevi mogu biti samo puka slučajnost, zato što između osam brojeva od 1 do 8 postoji čak pet Fibonaccijevih brojeva, stoga postoji dobra šansa pronalaska Fibonaccijevih brojeva čistom slučajnošću. Postotak Fibonaccijevih brojeva među svim ostalim brojevima dramatično se mijenja ako se sagledaju veći intervali brojeva.

Francuski arhitekt Le Corbusier (Charles-Edouard Jeanneret, 1887.-1965.) pretpostavio je da su proporcije ljudskog tijela zasnovane na zlatnom rezu. Le Corbusier je formulirao idealne proporcije na sljedeći način: visina 182 cm, visina pupka 113 cm, visina vrhova prstiju s podignutim rukama 226 cm. Omjer visine prema visini pupka iznosi 182/113 = 1.610619469, što je vrlo blizu zlatnog reza. Drugim mjerenjem istih proporcija dobio je analogni omjer od 176/109 = 1.6147, što je opet blizu omjera dvaju Fibonaccijevih brojeva, 13 i 21, ili 21/13= 1.615384615.

# Bibliografija

[1] B. Bakula, Z. Franušić, *Matrice s Fibonaccijevim brojevima*, math.e **26** (2015)

[2] V. Dimec, Z. Franušić, *Konstrukcije zlatnog reza*, Miš **74** (2014), 176-180.

[3] A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.

[4] N. Elezović, *Fibonaccijev niz*, `https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/diskont1-06.pdf`, (lipanj, 2016.)

[5] I. Nakić, *Diskretna matematika*,dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf` (lipanj, 2016.)

[6] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[7] A. S. Posamentier, I. Lehmann, *The Fabulous Fibonacci Numbers*, Prometheus Books, NY, 2007.

# Sažetak

Ovaj diplomski rad predstavlja uvod u Fibonaccijeve brojeve. U prvom poglavlju definiramo Fibonaccijeve brojeve, dokazujemo identitete s njima, te navodimo neka osnovna svojstva. U drugom dijelu rada objašnjavamo vezu zlatnog reza s Fibonaccijevim brojevima. Također otkrivamo prisutnost zlatnog reza i Fibonaccijevih brojeva u umjetnosti, arhitekturi i prirodi.

# Summary

This thesis is presented as an introduction to the Fibonacci sequence. In the first chapter we define Fibonacci numbers, give some identities involving them and prove some of their basic properties. In the second chapter we explain what the golden ratio is and its relationship to the Fibonacci sequence. Also we detect the occurrence of the golden section and Fibonacci numbers in art, architecture and nature.

# Životopis

Rođena sam 6.travnja 1987.godine u Šibeniku. Od svog rođenja do 19. godine sam živjela u Šibeniku, gdje sam i pohađala Osnovnu školu Jurja Šižgorića i Opću gimnaziju Antuna Vrančića. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja, 2006.godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, inženjerski smjer. Na istom fakultetu, 2007. godine upisujem nastavnički smjer. Diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički, upisujem 2013. godine.